Musterlösung 8

1. **a)** Es muss

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{\lambda^n}{n!} = c\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\right) = c(e^{\lambda} - 1)$$

gelten, also

$$c = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

b) Es ist

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{\lambda^n}{(n-1)!} = c\lambda\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = c\lambda e^{\lambda} = \frac{\lambda e^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1}$$

und

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} nc\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= c\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + E[X] = c\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + E[X] \\ &= c\lambda^2 e^{\lambda} + c\lambda e^{\lambda} = \frac{e^{\lambda}\lambda(\lambda+1)}{e^{\lambda} - 1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{e^{\lambda}\lambda(e^{\lambda} - \lambda - 1)}{(e^{\lambda} - 1)^2}.$$

Bitte wenden!

c)

$$(\mathbf{A}) \qquad \mathbb{P}[X = Y \mid Y = n] = \frac{\mathbb{P}[X = Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = \frac{\mathbb{P}[X = n, Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]}$$

$$\overset{\text{unabh.}}{=} \frac{\mathbb{P}[X = n] \cdot \mathbb{P}[Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = \mathbb{P}[X = n],$$

$$(\mathbf{B}) \qquad \mathbb{P}[0 \neq Y = n] = \mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \neq \mathbb{P}[X = n], \qquad (\text{da } c \neq e^{-\lambda})$$

$$(\mathbf{C}) \qquad \mathbb{P}[Y = n \mid Y \neq 0] = \frac{\mathbb{P}[0 \neq Y = n]}{\mathbb{P}[Y \neq 0]} = \frac{\mathbb{P}[Y = n]}{1 - \mathbb{P}[Y = 0]}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!(1 - e^{-\lambda})} = c\frac{\lambda^n}{n!} = \mathbb{P}[X = n],$$

$$(\mathbf{D}) \qquad \mathbb{P}[Y \neq 0 \mid Y = n] = \frac{\mathbb{P}[0 \neq Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = \frac{\mathbb{P}[Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = 1 \neq \mathbb{P}[X = n],$$

$$(\mathbf{E}) \qquad \mathbb{P}[X = n \mid Y = 0] = \frac{\mathbb{P}[X = n, Y = 0]}{\mathbb{P}[Y = 0]} \overset{\text{unabh.}}{=} \frac{\mathbb{P}[X = n] \cdot \mathbb{P}[Y = 0]}{\mathbb{P}[Y = 0]} = \mathbb{P}[X = n].$$

Also sind (**A**),(**C**) und (**E**) gleich $\mathbb{P}[X = n]$, (**B**) und (**D**) hingegen nicht.

2. **a)** X_n kann nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die n-te Ente vom ℓ-ten Jäger *nicht* getroffen wird, ist $1-p/m$. Da die Jäger unabhängig voneinander schiessen, beträgt für die n-te, und deswegen für jede Ente die Chance, unverletzt davonzukommen,

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k. \tag{1}$$

Also sind alle X_n Binomial-verteilt mit Parametern $\tilde{n} = 1$ und $\tilde{p} = (1 - p/m)^k$, also Bernoulli verteilt mit Parameter $\tilde{p}$.

b) Die Gesamtzahl X aller nicht verletzten Enten ist gleich $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$. Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_m]. \tag{2}$$

Da die X_n Indikatorvariablen sind, gilt $E[X_n] = \mathbb{P}[X_n = 1] = (1 - p/m)^k$ für alle $n = 1, \ldots, m$ und somit

$$E[X] = m\left(1 - \frac{p}{m}\right)^k.$$

c) Wir betrachten nur den Fall $k < m$, also weniger Jäger als Enten. Dann sind $X_1, \ldots, X_m$ **nicht** unabhängig, weil

$$\mathbb{P}[X_1 = \ldots = X_m = 0] = 0 < \left(1 - \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k\right)^m = \prod_{n=1}^{m} \mathbb{P}[X_n = 0].$$

Bemerkung: Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m$ sind auch **nicht** unabhängig, wenn $k \geq m$ und $m > 1$. Insbesondere ist X nicht Binomial-verteilt.

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

a) Für $0 \leq k \leq N,\ 0 \leq n-k \leq M$ gilt

$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

Für alle übrigen k ist $\mathbb{P}[X=k]=0$.

b) Wir nummerieren die weissen Kugeln von 1 bis N. Dann können wir X als Summe von Indikatorfunktionen schreiben:

$$X = X_1 + \ldots + X_N,$$

wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{die weisse Kugel Nr. } i \text{ wird gezogen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$E[X_i] = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1 \cdot \binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}} = \frac{n}{M+N}.$$

Es folgt

$$E[X] = \frac{Nn}{M+N}.$$